

Inga hjälpmedel är tillåtna. För full poäng krävs fullständiga motiveringar. 12 poäng ger säkert godkänd. Observera att uppgifterna *inte* är ordnade efter svårighetsgraden.

---

1. Hur många av alla fyrsiffriga tal (från 1000 till 9999) har egenskapen att siffrorna, i ordning från vänster till höger, varken bildar en växande eller en avtagande följd? (Till exempel bildar siffrorna i 1347 och 6789 en växande följd medan siffrorna i 6421 och 8652 bildar en avtagande följd.) (4p)

2. Ge ett kombinatoriskt bevis för följande identitet:

$$n! = \binom{n}{0}d_0 + \binom{n}{1}d_1 + \binom{n}{2}d_2 + \dots + \binom{n}{n}d_n$$

där  $d_k$  betecknar antalet derangements av en  $k$ -mängd. (4p)

3. I en korg finns fem olika sorters frukter, sex frukter av varje sort. På hur många sätt kan man dela frukterna i två (oordnade) högar med lika många frukter i varje hög? (4p)

4. Låt  $x_n$  beteckna antalet ord med längd  $n$  i alfabetet  $\{a, b, c, d, e\}$  där  $d$  och  $e$  sammanlagt förekommer ett udda antal gånger.

(a) Bestäm rekurrensrelationen för följden  $\{x_n\}$ . (3p)

(b) Lös rekurrensrelationen i (a). (2p)

5. Låt  $G$  vara en graf med 13 hörn och 43 kanter. Visa att  $\chi(G) \geq 3$ . (4p)  
(Ledtråd: Visa att  $G$  måste innehålla en udda krets.)

6. Låt  $X$  vara en mängd med  $n$  element. Konstruera en graf  $G_n$  vars hörn är alla icke-tomma delmängder till  $X$  och två hörn  $A$  och  $B$  är förenade med en kant om  $A \neq B$  samt  $A \cap B \neq \emptyset$ .

a) Hur många hörn har  $G_n$  och vilken är den maximala valensen i  $G_n$ ? (1p)

b) Bestäm  $\deg(B)$ , först om  $B$  är ett hörn i  $G_n$  med  $|B| = 3$  och sedan om  $B$  är ett hörn i  $G_n$  med  $|B| = k$ . För vilka  $n \geq 2$  finns i  $G_n$  en Eulersk stig? (3p)

c) (Extra) Bestäm antalet kanter i  $G_n$ . (4p)

(Ledtråd: (b) Hur många delmängder till  $X$  är disjunkta med  $B$ ?)

---

**LYCKA TILL!**

Skrivningsåterlämning: måndag den 29 augusti, kl 12:00 i kafferummet, hus 5 och därefter hos Tom Wollecki, rum 208, hus 6.