STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
14 december 2009

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II

14 december 2009 kl. 9–14

Examinator: Åke Svensson, tel. 16 45 69, akes@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
Återlämning: Hos examinator, rum 318, hus 6, torsdagen 17/12 kl 09.15 eller enligt överenskommelse.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för lägsta godkända betyg är 10 poäng på teoridelen och 20 poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa.

Teoridel: Uppgift 1

a) Vad menas med att en process är regenerativ? (4p)

b) Ange regenerationstidpunkter för en M/G/1-kö (4p)

c) Ange regenerationstidpunkter för en alternerande förnyelseprocess. (2p)

Teoridel: Uppgift 2

a) Vad är ett Pseudo-slumptal? (4p)

b) Låt U vara likformigt fördelat på $(0, 1)$. Anta att F är en kontinuerlig fördelningsfunktion. Visa att $X = F^{-1}(U)$ har fördelningsfuntionen F. (3p)

c) Vad är importance sampling? (3p)

Uppgift 3

Vi studerar en M/M/1-kö där den första kunden kommer till ett tomt system vid tiden $t = 0$. Ankomstinensiteten är λ och betjäningsintensiteten μ. Nyanlända kunder väntar tills de blivit betjänade.

Beräkna sannolikheten att

a) kund 2 måste vänta på betjäning (5p)

b) Den n'te kunden måste vänta på betjäning om n är ett stort tal. (5p)

Uppgift 4

Antag att vi har observerat en standard Brownsk rörelse $B(t)$ för $0 \leq t \leq 1$. Genom transformationen

$$X(t) = (t+1)B\left(\frac{t}{1+t}\right) - tB(1)$$

är bildar vi en process definierad för $0 \leq t < \infty$.

a) Vilken fördelning har $X(t)$? (3p)

b) Beräkna $Cov(X(s), X(t))$. (4p)

c) Vad för slags process är $X(t)$? (3p)

Uppgift 5

Man kan välja mellan två maskiner med olika kvalitet och pris. Livslängden på maskin A är exponentialfördelad med väntevärde 2 år. Kostnaden för denna maskin är C kr. Maskinen B kostar dubbelt så mycket, dvs $2C$ men har en livslängd som är exponentialfördelad med vänteväre 3 år. Maskinerna byts ut mot en maskin av samma typ utan fördröjning när den går sönder.

a) Vilken maskin är billigast att använda om man räknar kostnader under lång tid? (4p)

b) Antag att vid inköp av maskin B ingår en försäkring så att maskinen byts ut utan kostnad om den går sönder inom 1 år från inköpstillfället. Någon liknande försäkring finns inte för maskin A. Vilken maskin är då billigaste under lång tid.? (6p)

Uppgift 6

Ett kösystem växlar mellan att vara tomt ("idle") och upptaget (busy"). Kunderna anländer till en kassa enligt en Poissonprocess med intensitet λ. De väntar tills de blir betjänade. Låt S beteckna en betjäningstid, I en "idleperiod och B en busyperiod. Man vet att

$$\mathrm{E(I)} = 6,$$

$$\mathrm{E(B)} = 12,$$

$$\mathrm{E(S)} = 4,$$

man vet också att S har standardavvikelsen 3. Alla tider är mätta i minuter.

a) Beräkna hur stor del av tiden som systemet är tomt. (3p)

b) Beräkna medeltiden en kund får vänta i kö. (3p)

c) Beräkna medelkölängden. (4p)

Använd tex Pollaczek-Khinchines formel

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])},$$

och Littles formel för sambandet mellan medelantal kunder i en kö och en kunds medeltid i kö.

Lycka till!