STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, ÅS

MT5003
LÖSNINGAR
14 december 2009

Lösningar

Tentamen i Stokastiska processer II, 14 december 2009

Uppgift 1

a) En process $X(t)$, definierad på $t \geq 0$, är regenerativ om det finns tidpunkter där processen startar om stokastisk, dvs har samma stokastiska egenskaper efter denna tidpunkt som när den startade.

b) Det finns flera möjligheter. Antingen när en kund kommer till ett tomt system eller alternativ när en kund lämnar ett tomt system.

c) I en alternerande förhyelseprocess växlar fördelningen för tiderna mellan händelser mellan två olika fördelningar. En cykel består av två tider. Paren av tider är oberoende bivariata stokastiska variabler. En regenerationstidpunkt är början på en ny cykel.

Uppgift 2

a) Pseudoslumgenereras enligt en deterministisk algoritm som ger en följd av tal som uppför sig som en följd av likformigt fördelade stokastiska variabler i den meningen att de passerar ett antal statistiska test. Det som testas är tex fördelning och auto-korrelationer.

b) För ett likformigt fördelat slumptal gäller

$$P(U \leq x) = x,$$

Eftersom $F(F^{-1}(U) = U$ så gäller

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

c) Man vill skatta ett väntevärde för en funktion av en stokastisk variabel X, med täthetsfunktionen f, med Monte-Carlo-simulering, dvs

$$\theta = \mathrm{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx.$$

Man kan i stället simulera en variabel med täthetsfunktionen g och skatta

$$\theta = \int \frac{h(x)f(x)}{g(x)} g(x)dx.$$

I "importance samplingförsöker man välja g så att $\frac{h(X)f(X)}{g(X)}$ har mindre varians än $h(X)$.

Uppgift 3

a) Låt S_1 vara betjäningstiden för den första kunden. S_1 är exponentialfördelad med intensiteten μ. Låt också T vara tiden mellan ankomsten av den andra och den första kunden. T är exponentialfördelad med intensiteten λ. Den andra kundeen får vänta om $T < S_1$. Eftersom S_1 och T är oberoende är sannolikheten för detta $\lambda/(\mu + \lambda)$

b)Den n'te kunden slipper vänta om han anländer till ett tomt system. Den andel av tideen som systemet är tomt är P_0 om vi betraktar en lång tid. Sannolikheten att den n'te kunden får vänta är $1 - P_0$. Beräkningar ger att $1 - P_0 = \lambda/\mu$.

Uppgift 4

a) X(t) är en lineär kombination av $B(t/(1+t))$ och $B(1)$ som båda är normalfördelade. Alltså är $X(t)$ normalfördelad med väntevärde

$$\mathrm{E}(X(t)) = 0,$$

och varians

$$\mathrm{Var}(X(t)) = (t+1)^2 \frac{t}{t+1} + t^2 - 2t(t+1)\frac{t}{t+1} = t.$$

Vi har här utnyttjat att $\mathrm{Cov}(B(s), B(t)) = min(s,t)$.

b) om $s < t$ så är $s/(1+s) < t/(1+t) < 1$ och

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = (s+1)(t+1)\frac{s}{s+1} - (s+1)t\frac{s}{s+1} - t(s+1)\frac{t}{t+1} + st = s.$$

c) X(t) har samma väntevärden och kovarianser som en standard Brownsk rörelse. Eftersom en Gaussisk process bestäms av de två första momenten är den transformerade processen en standard Brownsk process på $(0, \infty)$.

Uppgift 5

a) Låt $N(t)$ vara antalet gånger maskinen måste förnyas under tiden t. Om μ är den förväntade livslängden på maskinen så gäller att

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu},$$

när $t \to \infty$.

Den genomsnittliga kostnaden för maskin A blir alltså $C/2$ kr per tidsenhet, och för maskin B, $2C/3$ per tidsenhet. Maskin A blir alltså billigare att hålla i drift.

b) Maskin B kostar 0 kr om den går sönder inom ett år och 2C kr om den går sönder efter längre tid än 1 år. Sannolikheten att den fungerar mer än 1 år är $exp(-1/3)$. Den förväntade kostnaden under en livscykel blir alltså $2Cexp(-1/3) \approx 1.433C$ kr. Enligt gränsvärdessatsen för sammansatta förnyelseprocesser blir den genomsnittliga kostnaden för maskin B då $2Cexp(-1/3)/3 \approx 0.48C$. I detta fall blir maskin B något billigare än maskin A.

Uppgift 6

a) Busy och idle perioder bildar en alternerande förnyelseprocess. Andelen av tiden som systemet är tomt blir

$$\frac{\mathrm{E}(I)}{\mathrm{E}(I) + \mathrm{E}(B)} = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}.$$

b) $\mathrm{E}(I) = 1/\lambda$. Det ger $\lambda = 1/6$. $\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{Var}(S) + \mathrm{E}(S^2))^2 = 9 + 16 = 25$. Enligt Pollaczek-Khinchines formel är

$$W_Q = \frac{1/6 * 25}{2(1 - 4/6)} = \frac{25}{4} = 6.25.$$

c) Enligt Littles formel är

$$L_Q = \lambda W_Q$$

Det följer att medelkölängden är $1/6 * 6.25 \approx 1.04$.