STOCKHOLMS UNIVERSITET	MS 2210
MATEMATISKA INSTITUTIONEN	TENTAMEN
Avd. Matematisk statistik	10 januari 2012

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II

10 januari 2012 kl. 9–14

Examinator: Thomas Höglund, hoglund@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare. Utdelad formelsamling.
Återlämning: Tisdag 17/1 2012 kl 14.30 i rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är 10 poäng på teoridelen och 20 poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga och lätta att följa.

Här är ett par formler av vilka någon kanske kan komma till användning. Med sedvanliga beteckningar gäller:

M/M/1-kö: $W = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$, $L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$

M/G/1-kö: $W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$

Teoridel: Uppgift 1

a) Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktionen $F(x) = x^2$ för $0 \leq x \leq 1$. Antag att du har simulerat ett slumptal från denna fördelning. Beskriv hur du kan göra för att simulera ytterligare ett slumptal från denna fördelning, negativt korrelerat med det första. (Du kan t.ex. uttrycka det andra som en funktion av det första.) (5 p)

b) Beskriv importance sampling. (Både hur man gör och varför.) (5 p)

Teoridel: Uppgift 2

a) Definiera vad som menas med att en process $\{X_n; n \geq 1\}$ är stationär. (3 p)

b) Definiera vad som menas med att den är svagt stationär. (3 p)

c) Låt $Z_0, Z_1, Z_2, ...$ vara oberoende stokastiska variabler, alla med väntevärde 0 och varians 1. Sätt $X_n = (Z_n + Z_{n-1})/2$ för $n = 1, 2, ...$. Är processen $X_1, X_2, ...$ svagt stationär? Svaret ska motiveras. (4 p)

Uppgift 3

Betrakta den Gaussiska processen $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$, $t \geq 0$. Här är $B(t)$ en standariserad Brownsk rörelse och μ, $\sigma > 0$ givna parametrar. Man har observerat att $X(0) = x_0, X(1) = x_1$ och $X(3) = x_3$. Bestäm sannolikhetsfördelningen för $X(2)$ betingat av dessa tre värden. (10 p)

Uppgift 4

Äldreboendet Kopparslagaren drivs av vårdbolaget KRAMA who cares. Av besparingsskäl byter man endast blöjor som är fulla. Tiden från att blöjan byts tills den är full är en stokastisk variabel som med hygglig approximation är likformigt fördelad på intervallet $(3, 9)$ (timmar). Byten av fulla blöjor sker enligt en Poissonprocess med intensiteten $1/2$ per timme (dvs tiden från att en blöja är full tills dess att den byts är exponentialfördelad med väntevärde 2 timmar).

Låt $N(t)$ beteckna antalet blöjor som har bytts på en viss patient under ett tidsintervall av längden t timmar.

a) Beräkna approximativt $E[N(720)]$. (2 p)

b) Beräkna approximativt $P(80 < N(720) < 95)$. (8 p)

Uppgift 5

KRAMA har tagit intryck av kritik som riktats mot bolages blöjbyten och vill därför ändra rutiner. Man är forfarande kostnadsmedvetna men vill också ta hänsyn till patienternas välbefinnande.

Man beslutar sig för att pröva följande rutin: Varje blöja byts efter T timmar såtillvida den inte blir full dessförinnan i vilket fall man byter omedelbart. Kostnaden att byta en blöja innan den är full är 20 kronor medan kostnaden att byta en blöja som är full är dubbelt så hög, 40 kronor, eftersom man då också byter lakan.

Tiden från att blöjan byts tills den är full är en stokastisk variabel som med hygglig approximation är likformigt fördelad på intervallet $(3, 9)$ (timmar).

Beräkna den långsiktiga kostnaden per patient och timme. Vilket värde på T minimerar denna? (10 p)

Uppgift 6

Den så kallade slumpmässiga telegrafsignalen är en stokastisk process $X(t)$ där startvärdet antingen är -1 eller $+1$ med lika stor sannolikhet. Värdet växlar sen mellan -1 och$+1$ varje gång en händelse sker i en viss Poissonprocess.

Betrakta nu den här varianten av denna process: Varje gång det sker en händelse i Poissonprocessen så väljer vi ett nytt värde på $X(t)$ men det nya värdet är inte nödvändigtvis lika med minus det gamla utan det är -1 eller $+1$ med lika stor sannolikhet, oberoende det tidigare värdet. Beräkna kovariansfunktionen för den nya processen.

Eventuellt kan du ha användning av att kovariansfunktionen för den slumpmässiga telegrafsignalen är $R(s,t) = e^{-2\lambda|t-s|}$, där λ är Poissonprocessens intensitet.

Lycka till!