STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MS 2210
TENTAMEN
8 januari 2013

# Tentamen i Stokastiska processer och simulering II

## 8 januari 2013 kl. 9–14

*Examinator:* Thomas Höglund, hoglund@math.su.se
*Tillåtna hjälpmedel:* Miniräknare. Utdelad formelsamling.
*Återlämning:* Fredag 18/1 2013 kl 14.00 i rum 321, hus 6.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är 10 poäng på teoridelen och 20 poäng på problemdelen. Resonemang skall vara klara och tydliga och lätta att följa.

Här är ett par formler av vilka någon kanske kan komma till användning. Med sedvanliga beteckningar gäller:

M/M/1-kö: $W = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$, $L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$

M/G/1-kö: $W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}$

---

## Teoridel: Uppgift 1

**a)** Låt $X_1, X_2, ...$ vara en följd av oberoende och identiskt fördelade stokastiska variabler. Definiera vad som menas med att $N$ är en stopptid för $X_1, X_2, ....$ (5 p)

**b)** Den stokastiska variabeln $X$ har fördelningsfunktionen $F(x) = 1 - e^{-x}$ för $x \geq 0$. Antag att du har simulerat ett slumptal från denna fördelning. Beskriv hur du kan göra för att simulera ytterligare ett slumptal från denna fördelning, negativt korrelerat med det första. (Du kan t.ex. uttrycka det andra som en funktion av det första.) (5 p)

## Teoridel: Uppgift 2

Vad menas med att en stokastisk process $\{X_t; t \geq 0\}$ är

**a)** Gaussisk? (2 p)

**b)** Stationär? (2 p)

**c)** Svagt stationär? (2 p)

**d)** Ange för var och en av följande implikationer om den är sann eller falsk:

(i) (a) och (b) $\rightarrow$ (c).

(ii) (a) och (c) $\rightarrow$ (b).

(iii) (c) $\rightarrow$ (b).

(iv) (c) $\rightarrow$ (a). (4 p)

## Uppgift 3

De glödlampor som används till en viss lyktstolpe har en livslängd som är exponentialfördelad med väntevärde 140 dygn. Tiden från det att en lampa slocknat tills dess att den byts är också exponentialfördelad men med väntevärde 7 dygn. Låt $N(t)$ beteckna antalet lampor som har bytts under ett tidsintervall av längden $t$ dygn.

**a)** Beräkna approximativt $E[N(4000)]$. (2 p)

**b)** Beräkna approximativt $P(20 < N(4000) < 30)$. (8 p)

## Uppgift 4

En maskin vars livslängd är likformigt fördelad på intervallet $(0, 1)$, (enhet: år), byts ut när den går sönder dock senast efter $T$ år. Det kostar 2 kr om maskinen byts ut innan den gått sönder och 5 kr annars. Bestäm $T$ så att kostnaden i det långa loppet minimeras. (10 p)

## Uppgift 5

Priset på en aktie vid tiden $t$, $S_t$, utvecklas enligt en geometrisk Brownsk rörelse:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B(t)},$$

där $B(t)$ är en standardiserad Brownsk rörelse och $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$. Tiden mäts i år.

Du har idag, $t = 0$, tecknat ett kontrakt som ger dig rätten till $(S_{1/3} + S_{2/3} + S_1)/3$ SEK om 1 år. Efter 1 år får du 97 SEK. Du vet att $S_0 = 105$, $S_{1/3} = 100$ och $S_1 = 120$ men har ännu inte tagit reda på vad aktien stod i vid $t = 2/3$. Enligt din motpart var alltså $S_{2/3} = 71$. För att få en uppfattning om detta är rimligt kan man beräkna sannolikheten att $S_{2/3} \leq 71$ givet priserna vid $t = 0$, $t = 1/3$ och $t = 1$. Gör det! (10 p)

## Uppgift 6

Betrakta en förnyelseprocess där tidsmellanrummen mellan förnyelserna har en kontinuerlig fördelning med tätheten $f(x)$, fördelningsfunktionen $F(x)$ och väntevärde $\mu$. Under vissa förutsättningar har åldern $A(t) = t - S_{N(t)}$ och excessen $Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ den asymptotiska tätheten

$$f_e(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu} \text{ för } x \geq 0,$$

då $t \to \infty$ och $L(t) = A(t) + Y(t)$ har den asymptotiska tätheten

$$f_*(x) = \frac{x f(x)}{\mu} \text{ för } x \geq 0.$$

Antag detta och visa att

$$\lim_{t \to \infty} E[A(t)Y(t)] = \frac{\int_0^\infty x^3 f(x) dx}{6\mu}.$$

(10 p)

*Lycka till!*