1 Föreläsning 1

Temat för dagen, och för dessa anteckningar, är att introducera lite matematisk terminologi och notation, vissa grundkoncept som kommer att vara genomgående i kursen. I grundskolan presenteras matematik mest som ett sorts hantverk eller färdighet i att lösa en viss sorts problem. Det stämmer såklart, men matematiken är utöver det också ett sorts språk och sätt att uttrycka logiska resonemang.

1.1 Implikationer, "om och endast om"

I matematik gäller det att vara noga med logiken. Ofta i matematisk text kan man läsa ord som "implicerar" eller uttryck som "om och endast om". För att förklara dessa nyckelord, tänk er en golvlampa (med en lysknapp).

> Lampan är släckt om lysknappen är av, dvs om lysknappen är av implicerar det att lampan är släckt.

Omvänt har vi också att:

> Lampan är tänd om lysknappen är på, dvs om lysknappen är på implicerar det att lampan är tänd.

Alltså kan vi säga att:

> Lampan är tänd om och endast om lysknappen är på, dvs att lysknappen är på är ekvivalent med att lampan är det.

Matematiker skriver ibland detta koncist med implikationspilar. En pil $\Rightarrow$ utläses "om" eller "implicerar", och en dubbelpil $\Leftrightarrow$ utläses "om och endast om" eller "är ekvivalent med". Vi skulle alltså kunna skriva

$$\text{Knappen är på} \Rightarrow \text{Lampan lyser}, \quad \text{Knappen är av} \Rightarrow \text{Lampan är släckt},$$

dvs

$$\text{Lampan lyser} \Leftrightarrow \text{Knappen är på}.$$

Antag nu istället att golvlampan är inkopplad i en förlängningsdosa, och att förlängningsdosan har en egen strömbrytare. Det är fortfarande sant att

> Lampan är släckt om lysknappen är av. Det vill säga, om lysknappen är av implicerar det att lampan är av.

Samma sak gäller även strömbrytaren på förlängsningsdosan!

> Lampan är släckt om förlängningsdosans strömbrytare är av. Det vill säga, om förlängningsdosan är av *implicerar* det att lampan är av.

Alltså är det inte sant att ljuset är tänt om och endast om lampans lysknapp är på, själva förlängningsdosan kan ju vara av! Istället får vi säga att

> Lampan är tänd om båda lysknappen och förlängningsdosan är på. Det vill säga, om både lysknappen och förlängningsdosan är på *implicerar* det att lampan är tänd.

Notera att detta är inte ett "om och endast om", eftersom ljuset kan vara släckt utan att båda knapparna är av. Den enda ekvivalens vi kan hävda är

> Lampan är släckt om och endast om minst en av knapparna är av.

Ett standardexempel där det är lätt att göra en tankevurpa är kvadratrötter. Om $x = 2$ gäller $x^2 = 4$, dvs

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

Detta är däremot inte en ekvivalens, $x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$, för $x^2 = 4$ har även lösningen $x = -2$. Korrekta ekvivalenser är alltså

$$x = \pm 2 \Leftrightarrow x^2 = 4, \text{ eller } x^2 = 4,\ x > 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Det är lätt att överanvända pilar: Lösningen i matteblocket kan lätt bli en serie uträkningar förbunda med pilar, den första uträkningen leder till den andra, som leder till den tredje, osv. Det kanske kan vara okej när man kladdar för sig själv men för att det ska bli begripligt för någon annan (och för en själv, om man måste gå tillbaka någon dag senare och fräscha upp minnet av någon lösning) så är det mycket bättre att skriva ut tankegångarna med fullständiga meningar. Min personliga åsikt är att det är bäst att helt undvika pilar, men läroboken (PB) använder dem så det är viktigt att ni förstår vad de betyder.

1.2 Mängder och funktioner

Mängdlära är ett djuplodande och aktivt forskningsfält inom matematik och logik. Under kursen kommer vi emellertid egentligen bara att möta mängdlära i form av en sorts genomgående terminologi. När en matematiker pratar om en *mängd* menas en uppsättning *element*. Vi skriver

$$q \in S,$$

för att säga att q är ett element i mängden S. Mängden S är sålunda kollektionen av alla $q \in S$. Mängder anges ofta med hjälp av "måsvingar"; notationen

$$S = \{a, b, c, d\}$$

betyder att mängden S består av de fyra ingående elementen a, b, c och d. Det mest triviala exemplet på en mängd är den *tomma mängden*, det är den entydigt besämda mängden som helst saknar element:

$$\emptyset = \{\ \}.$$

Två mängder är lika (enligt definition) om de har exakt samma element. En mängd A är en *delmängd* till en mängd B, skrivet $A \subset B$, om alla element i A också är element i B. Till exempel är

$$\{1, 2, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en delmängd, och

$$\{d \text{ är en dag med dåligt väder}\} = \emptyset,$$

eftersom det inte finns några dagar med dåligt väder, bara dåliga kläder...

En *funktion* f från en mängd A till en mängd B är en process eller regel som till varje element $a \in A$ tillordnar ett entydigt bestämt element $f(a) \in B$. Notationen för detta är

$$f : A \to B,$$

vilket alltså utläses "f är en funktion från mängden A till mängden B". Mängden A kallas *definitionsområdet* för funktionen f, och mängden B kallas funktionens *målmängd*. Mängden

$$f(A) = \{\text{Funktionsvärdena } f(a) \text{ för alla } a \in A\}$$

kallas funktionens *värdemängd*. Notera att $f(A) \subset B$, dvs värdemängden är en delmängd av målmängden. Ett annat sätt tänka på detta är att f är en process, algoritm eller maskin som accepterar element i dess definitionsområde A som input, och spottar ut element i målmängden B som output. Som exempel, låt

$$S = \{P \text{ är en student i den här kursen}\}$$

vara mängden av studenter i den här kursen, och låt

$$D = \{d \text{ är ett datum under 2015}\}$$

vara mängden av datum under 2015. Vi har då en "födelsedagsfunktion"

$$f : S \to D$$

som givet input studenten P ger oss som output $f(P)$ datumet för P:s födelsedag.

En funktion kan åskådliggöras på flera sätt. De två viktigaste i den här kursen är via en värdetabell eller en graf. Att lista alla studenter (input-värden) i en kolumn och bredvid den lista en kolumn med korresponderande födelsedagsdatum (output-värden) skulle ge en värdetabell för vår födelsedagsfunktion. En graf för funktionen skulle ges av att ange studenter som punkter längs en axel, datum längs en annan axel, och sedan plotta värdena.

Ett lite mer matematiskt exempel på en funktion är följande. Låt {saldon \$} vara mängden möjliga saldon på ett bankkonto (i dollar). Låt säga att du av banken lovas två procents årlig ränta på ditt sparkonto. Antalet pengar på ditt konto om ett år ges då av värdet på funktionen

$$g : \{\text{saldon \$}\} \to \{\text{saldon \$}\}$$

som givet som input saldot x \$ ger output saldot $g(x) = 1,02 \cdot x$ \$. Detta för oss in på ekvationsbegreppet. Frågan hur många dollar måste jag sätta in för att få ut 10200 \$ vid årsslutet är matematiskt ekvationsproblemet: Finn lösningen x till ekvationen

$$g(x) = 10200\$, \quad \text{dvs} \;\; 1,02 \cdot x = 10200.$$

Detta har den unika lösningen $x = 10000$ \$.

Med en *ekvation* (eller, ett ekvationsproblem) kommer vi i den här kursen mena problem av typen: Givet funktionen $f : A \to B$ och ett fixt värde $b \in B$, finn alla $x \in A$ sådana att $f(x) = b$.

Funktioner kan komponeras. Om $p : A \to B$ och $q : B \to C$, så får vi en funktion $q \circ p : A \to C$, via kompositionsregeln att den tar ett input $a \in A$ till output $q(p(a)) \in C$. Vi tar alltså output för p som input för q. Funktionen $q \circ p$ läses som "kompositionen av p och q", "q boll p" eller, mer informellet, som "q av p". Till exempel är kompositionen $g \circ g : \{\text{saldon \$}\} \to \{\text{saldon \$}\}$ funktionen

$$g(g(x)) = 1,02 \cdot 1,02 \cdot x = 1,0404 \cdot x \;\; \$.$$

Den beskriver saldot efter två års sparande. Ett annat exempel kunde vara följande. Låt {saldon kr} vara mängden möjliga saldon i kronor. Låt säga att vi har en växelkurs på 1 \$ = 7,95 kr. Vi kan tolka detta som en "växelfunktion"

$$h : \{\text{saldon \$}\} \to \{\text{saldon kr}\}, \; h(x) = 7,95x.$$

Hur många kronor vi får ut efter ett års sparande, om vi sätter in i dollar, ges nu av kompositionen

$$h \circ g : \{\text{saldon \$}\} \to \{\text{saldon kr}\}, \; h \circ g(x) = 7,95 \cdot 1,02 \cdot x = 8,109 \cdot x.$$

Varje mängd A har en identitetsfunktion $id_A : A \to A$ som inte gör något alls, dvs $id_A(a) = a$. En funktion $g : B \to A$ sägs vara *invers* till en funktion $f : A \to B$ om kompositionen $f \circ g$ är lika med identitetsfunktionen id_B och kompositionen $g \circ f$ är lika med identitetsfunktionen id_A. Om så är fallet skriver vi $g = f^{-1}$ och säger att g är invers till f. Notera att inte alla funktioner har en invers!

Problem. Hitta inversen till funktionen $h \circ g$ (ovan), samt till h och g. Kan inversen till $h \circ g$ beskrivas i termer av inverserna för h och g?

Problem. Låt $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ beteckna mängden av alla heltal och låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vara funktionen som ges av $f(x) = x^2$. Har funktionen f en invers?

Problem. Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ vara mängden av alla så kalla naturliga tal, dvs alla icke-negativa heltal och låt $f(\mathbb{Z})$ vara värdemängden till funktionen f ovan. Definiera sedan $g : \mathbb{N} \to f(\mathbb{Z})$ via $g(x) = x^2$. Har funktionen g en invers?

"Funktioner" är förmodligen det enskilt viktigaste begreppet i kursen! Viktigare än "tal" och "siffror", så försäkra dig om att du känner dig bekväm med begreppet.

1.3 Union, snitt, komplement och kardinalitet

Här följer lite ytterligare terminologi och notation rörande mängder. Låt A och B vara mängder. *Unionen* av A och B är mängden $A \cup B$ som vi definerar genom att säga att den består av alla x med egenskapen att x är ett element i antingen A eller B, eller i båda. Till exempel är

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

och

$$\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}.$$

Notera att både A och B är delmängder av unionen. *Snittet* $A \cap B$ är den mängd som består av alla x med egenskapen att x ligger i både A och B. Till exempel är

$$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\},$$

och

$$\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}.$$

Notera att snittet är en delmängd till både A och B. Om $S \subset A$ är en delmängd så definieras dess *komplement*, skrivet $A \setminus S$, som mängden av alla $x \in A$ som inte tillhör S. Till exempel är

$$\{a, b, c, d\} \setminus \{a, c\} = \{b, d\}.$$

Union, snitt och komplement kan lätt åskådliggöras med hjälp av så kallade Venn-diagram, se till exempel Wikipedia (engelska sidan är bäst).

En mängds *kardinalitet* är definerat som antalet ingående element; vi skriver $|A|$ för kardinaliteten av mängden A. Exempelvis är

$$|\{a, b, c, d, e\}| = 5.$$

Problem. Visa att för tre godtyckliga mängder A, B och C, var och en med ändlig kardinalitet, gäller att

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$