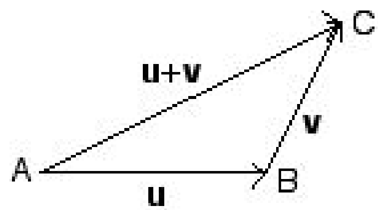
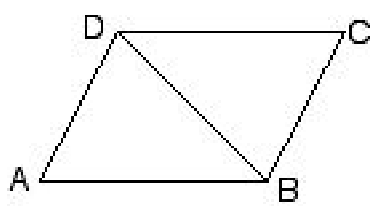
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd matematik
Torbjörn Tambour

Räkning med vektorer

Vi ska definiera och diskutera de grundläggande räkneoperationerna med vektorer. Låt **u** och **v** vara två vektorer. För att definiera summan av dem ritar man först en representant för **u** och sedan en representant för **v** som börjar i **u**:s spets. Säg att $\mathbf{u} = \overline{AB}$ och $\mathbf{v} = \overline{BC}$. Då definieras summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ som vektorn $\overline{AC}$.



Man kan se på vektoraddition på ett annat sätt också, men innan vi kommer till det måste vi diskutera en sats ur geometrin. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning och antag att AD och BC är lika långa och parallella. Då gäller att $ABCD$ är en parallellogram, dvs AB och DC är också lika långa och parallella. Här är ett bevis (som du kan hoppa över om du vill): Vi har $\wedge ADB \cong \wedge DBC$ eftersom de är alternatvinklar och AD och BC är parallella. Enligt kongruensfallet SVS är $\triangle ADB \cong CBD$, så speciellt är $AB \cong DC$ och $\wedge ABD \cong \wedge BDC$. Men dessa är också alternatvinklar, så AB är parallell med DC.

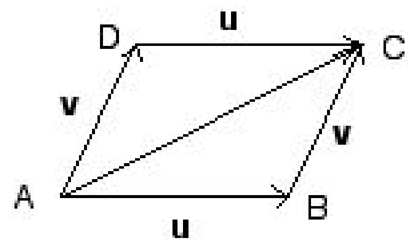


Vi går tillbaka till vektoradditionen. I stället för att avsätta **v** från spetsen på **u** så avsätter vi vektorerna från samma punkt, säg att $\mathbf{u} = \overline{AB}$ och $\mathbf{v} = \overline{AD}$. Enligt ovan är $ABCD$ en parallellogram och summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ är helt enkelt en av diagonalerna (nämligen $\overline{AC}$) i den. Detta sätt att se på vektoraddition kallas ibland *parallellogramlagen.* Lägg märke till att **u** från början var $\overline{AB}$, men att vi också kan skriva $\mathbf{u} = \overline{DC}$. Eftersom

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$$

så har vi den *kommutativa lagen för vektoraddition*

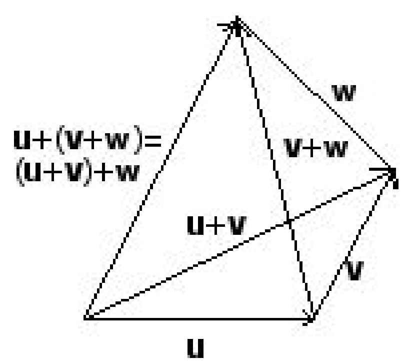
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$



Den *associativa lagen* lyder

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

och den inser man ur följande figur:

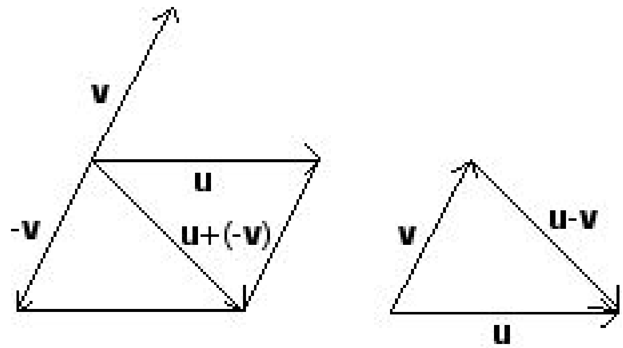


Nästa steg är att definiera *subtraktion* och vi börjar med att definiera $-\mathbf{u}$ som en vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men riktad åt rakt motsatt håll. Om $\mathbf{u} = \overline{AB}$, så är $-\mathbf{u} = \overline{BA}$. Alltså är $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overline{AA} = \overline{BB}$. Vektorn $\overline{AA}$ innebär ingen förflyttning alls och den kallas *nollvektorn* $\mathbf{0}$. Vi har

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

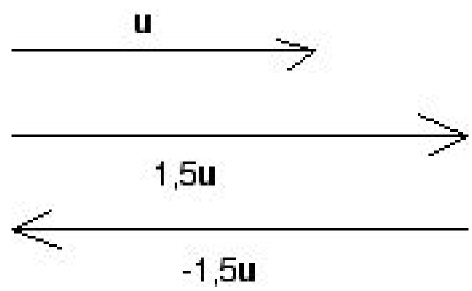
för alla vektorer $\mathbf{v}$. Nu definierar vi

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$



I figurerna ovan ser vi att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är en pil som är riktad från spetsen av $\mathbf{v}$ till spetsen av $\mathbf{u}$. Den är alltså den andra diagonalen i parallellogrammen som har sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Precis som det bör vara så ser vi ur den vänstra figuren att $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Vektorn $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ är en pil som går från spetsen av $\mathbf{u}$ till spetsen av $\mathbf{v}$, vilket betyder att den är lika lång som $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ men riktad åt rakt motsatt håll. Alltså är $\mathbf{v} - \mathbf{u} = -(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Den sista operationen är *multiplikation av en vektor med ett tal*. Om $t > 0$ så definierar vi $t \cdot \mathbf{u}$ som en vektor som är t gånger så lång som $\mathbf{u}$ och är parallell med $\mathbf{u}$ samt är riktad åt samma håll som $\mathbf{u}$.



Vi sätter vidare $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Om $t > 0$ så är ju $-t < 0$ och vi definierar $(-t) \cdot \mathbf{u}$ som en vektor som är t gånger så lång som $\mathbf{u}$ och är parallell med $\mathbf{u}$, men är riktad åt rakt motsatt håll. Vi ser att $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$, precis som det bör vara (lägg märke till att $-\mathbf{u}$ är definierad på ett sätt ovan medan $(-1) \cdot \mathbf{u}$ definierades alldeles nyss).