Svar till Xantchas diskussionsfrågor om linjer och plan

av Åsa Ericsson

1. (Rita figurer.)

(a) Sant! Ekvationen ger ett linjärt samband mellan koordinaterna x och y. Att detta ger en linje i planet — alltså i två dimensioner — är välkänt (om man så vill kan y lösas ut och kan ses som en linjär funktion av x, vars graf så klart är en linje). I rummet — alltså i tre dimensioner — ger ekvationen ett plan. Eftersom den tredje koordinaten, säg z, inte finns med i ekvationen kan z anta vilket värde som helst (för varje par av värden på x och y som uppfyller ekvationen). Det innebär att planet är parallellt med z-axeln. Ekvationen kan skrivas $1 \cdot x + 2 \cdot y + 0 \cdot z = -7$ vilket är ekvationen för ett plan med normalvektor $\bar{n} = (1, 2, 0)$.

(b) Sant! I ekvationen för en linje skriven på parameterform finns en parameter, säg t, multiplicerad med en riktningsvektor vilken alltså är en vektor parallell med linjen. Om linjen är framställd med tre uttryck (eller bara två om man är i planet), ett för var och en av koordinaterna så är koefficienterna till t koordinaterna i riktningsvektorn.

(c) Falskt! Linjen har en riktningsvektor $\bar{v} = (1, 0, -1)$ och eftersom planets ekvation på normalform kan skrivas $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-1) \cdot z = 4$ så är $\bar{n} = (1, 0, -1)$ en normalvektor. Linjen har alltså samma riktning som planets normal och är alltså vinkelrät mot planet. (Om linjen vore parallell med planet så skulle skalärprodukten $\bar{v} \cdot \bar{n}$ vara 0.)

(d) Sant! Om en punkt $P = (a, b, c)$ är given är det bara att sätta in koordinaterna i planets ekvation och kontrollera om vänster led blir lika med höger led för avgöra om punkten ligger i planet.

(e) Falskt! Planet har normalvektor $\bar{n} = (1, -2, 1)$ (från koefficienterna framför x, y och z i planets ekvation). Vektorn $\bar{u} = (1, 1, 2)$ är parallell med planet om den är vinkelrät mot normalen, d.v.s. om skalärprodukten $\bar{n} \cdot \bar{u} = 0$. Vi testar: $\bar{n} \cdot \bar{u} = (1, -2, 1) \cdot (1, 1, 2) = 1 - 2 + 2 = 1$. Vektorn är alltså inte parallell med planet.

(f) Falskt! Om två parallella vektorer $\bar{v}$ och $\bar{v}$ är normerade (= har längd 1) så gäller det att deras skalärprodukt är 1 eller -1, vilket motsvaras av att vinkeln mellan dem är $0°$ eller $180°$. Men för vektorer av godtycklig längd kan värdet bli ”vad som helst”. Det är $\dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \cos\alpha$ som ska ha värdet 1 eller -1.

(g) Beror på vad man menar – det är inte alltid samma vinkel! Tänk dig en linje och dess riktningsvektor. Lägg till ännu en linje. När man talar om vinkeln $\bar{v}$ mellan två linjer så syftar man på den minsta vinkeln mellan dem, vilken alltid är mindre än eller lika med $90°$; det finns ju även en yttre vinkel som är $180° - \bar{v}$. Om riktningsvektorn för den andra linjen pekar i den riktning som ”stämmer bäst” med den första linjens så är vinkeln mellan vektorerna densamma som mellan linjerna. Men om den andra linjens rikningsvektor pekar ”mer i motsatt riktning” så är vinkeln mellan vektorerna istället den större vinkeln $180° - \bar{v}$. I båda fallen är det dock enkelt att bestämma vinkeln $\bar{v}$ mellan linjerna från vinkeln mellan riktningsvektorerna.

(h) Sant, men med samma tillägg som i deluppgiften ovan! Betrakta planen från sidan så att de bildar ett kryss; det ser bara ut som två skärande linjer, lätt att rita. Rita in normalvektorer. Om dessa vrids $90°$ sammanfaller de med linjerna. Alltså måste vinkeln mellan normalvektorerna vara densamma som mellan linjerna i figuren, vilken är densamma som vinkeln mellan planen (alternativt $180°$ minus vinkeln mellan planen).

(i) Sant! Två linjer sammanfaller om de har parallella riktningsvektorer samt en gemensam punkt; det följer att de har alla punkter gemensamt. Dessa linjer har ritkningsvektorer $\bar{v}_1 = (2, 4, 4)$ och $\bar{v}_2(-1, -2, -2)$. Det är lätt att se att $\bar{v}_1 = -2\bar{v}_2$. Punkten $(3, 4, 2)$ ligger på den första linjen (motsvarar $s = 0$). Med $t = -4$ ger den andra linjens ekvation punkten $(x, y, z) = (-1, -4, -6) - 4(-1, -2, -2) = (3, 4, 2)$ vilket visar att punkten även ligger på den andra linjen. Alltså är linjerna lika.

(j) Sant! Planens normalvektorer, $(1, 1, 4)$ resp. $(2, -1, -1)$, är inte parallella. Därmed är inte planen parallella. Två plan som inte är parallella skär alltid varandra i en linje.

2. (Rita figurer.)

(a) Låt den sökta vektorn vara (a, b, c). Finn uttryck för skalärprodukten med de två givna vektorerna. Eftersom den sökta vektorn ska vara vinkelrät mot dessa ska skalärprodukterna vara 0. Alltså får man ett ekvationssystem. Notera att vi har tre obekanta, a, b och c, men bara två ekvationer som ska uppfyllas. Det beror på att längden på vektorn är oväsentlig så det går alltid att multiplicera den med ett godtyckligt tal. Vid räkningarna kan man utnyttja detta genom att välja något av talen a, b eller c så att ekvationerna blir enkla att lösa (ev. måste något av talen vara 0, annars kan det väljas till 1, eller något annat smidigt).

(b) En linje i rymden (= rummet) beskriven på parameterform ger uttryck för x, y och z som beror av en parameter, säg t. Skärningspunkten bestäms genom att dessa uttryck sätts in i planets ekvation på normalform. Ekvationen löses för parametern t vilken, då den sätts in i linjens ekvation, ger skärningspunkten. Vinkeln α mellan linjen och planet kan bestämmas genom att man först beräknar vinkeln β mellan linjens riktningsvektor och planets normalvektor (med formeln för skalärprodukt som innehåller cosinus för vinkeln). Den sökta vinkeln är $\alpha = 90° - \beta$ om $\beta \leq 90$ och $\alpha = \beta - 90°$ om $\beta > 90$.

(c) Låt oss anta att de två linjerna inte är parallella (om de är parallella finns bara en linje mittemellan). Riktningarna för linjerna mittemellan två linjer fås från de givna linjerna på följande sätt. Börja med att finna riktningsvektorer $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ för de givna linjerna sådana att de har samma längd. Riktningarna för de sökta linjerna blir då summan respektive skillnaden av dessa riktningsvektorer, d.v.s. $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ och $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$. För att kunna skriva ner linjernas ekvation på parameterform behövs även en punkt på linjerna: denna fås genom att bestämma skärningspunkten för de givna linjerna. Slutligen kan de sökta linjerna skrivas på normalform om så önskas.

(d) Det finns ett flertal sätt att gå till väga, här är ett förslag. Kalla den sökta punkten för P. Vektorn $\overline{AP}$ motsvarar då höjden (från hörnet A till sidan BC) i triangeln. Denna ska vara vinkelrät mot sidan BC. Längs BC har vi (t.ex. följande) två vektorer: $\overline{BP}$ och $\overline{BC}$. Båda dessas skalärprodukt med $\overline{AP}$ ska alltså vara noll; det ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} \overline{BP} \cdot \overline{AP} = 0 \ , \\ \overline{BC} \cdot \overline{AP} = 0 \ . \end{cases}$$

För en triangel i planet, sätt $P = (x, y)$. Om koordinaterna för punkterna A, B och C är givna är det bara att sätta in i ekvationssystemet och lösa det för x och y. (Den första ekvationen är en andragradsekvation, men den andra är linjär, så ur den andra kan antingen x eller y lösas ut för att sedan sättas in i den första.)
För en triangel given i rummet sätts $P = (x, y, z)$. Då behövs ett villkor till och det är (t.ex.) kravet att $\overline{BP}$ och $\overline{BC}$ ska vara parallella, d.v.s. att $\overline{BP} = \lambda\overline{BC}$ för något tal λ. Återigen har man ett ekvationssystem att lösa, bara att det är krångligare i detta fall.

(e) Skärningsvinkeln mellan cirklarna är vinkeln mellan tangenterna i skärningspunkten P (det räcker att titta på den ena skärningspunkten, det blir samma vinklar). Tangenterna är vinkelräta vektorerna $\overline{M_1P}$ resp. $\overline{M_2P}$, där M_1 och M_2 är cirklarnas mittpunkter. Det finns två möjliga fall.
Fall 1 är då cirklarna bara överlappar en hel del så att minst den ena av cirklarna innehåller den andras mittpunkt. Då kommer vinkeln β mellan "radierna" $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ vara mindre än 90° och den sökta vinkeln $\alpha = \beta$. Det kan ses om man ritar $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ och tangenterna som är vinkelräta mot dessa. Vrider man $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ 90° sammanfaller deras riktning med tangenternas.
Fall 2 är då cirklarna bara överlappar lite så att inte någon av cirklarna innehåller den andras mittpunkt. Då kommer vinkeln β mellan "radierna" $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ vara större än 90° och den sökta vinkeln $\alpha = 180° - \beta$. Det kan ses om man ritar $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ och tangenterna som är vinkelräta mot dessa. Vrider man $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$ 90° sammanfaller deras riktningar med tangenterna, men den mindre vinkeln som söks mellan tangenterna är den inre och inte den yttre som fås mellan $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$.
I båda fallen beräknas β med hjälp av skalärprodukten mellan $\overline{M_1P}$ och $\overline{M_2P}$, efter det att en skärningspunkt P bestämts.
(Att se att det blir två fall och hantera båda får nog anses som överkurs.)