STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, ÅS

MS 3150
LÖSNINGAR
4 Juni 2010

Lösningar

Tentamen i Stokastiska processer och simulering II, 4 Juni 2010

Teoridel: Uppgift 1

a) Om en följd icke-negativa stokastiska variabler $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade så sägs den motsvarnade räkneprocessen

$$N(t) = \max\{n; S_n \leq t\}$$

vara en förnyelseprocess. Här är $S_0 = 0$ och $S_n = \sum_1^n X_i$.

b)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

när $t \to \infty$. Här är $m(t) = \mathrm{E}(N(t)$ och $\mu = \mathrm{E}(X_i)$.

c) Vid varje förhyelse får vi en belöning av storlek R_n. Då är

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

den totala belöningen vid tiden t.

Teoridel: Uppgift 2

Vi betraktar en stokastisk process $X(t)$

a) Processen är Gaussisk om $(X(t_1), \ldots, X(t_n)$ har en multivariat normalfördelning för alla $t_1, \ldots, t_n$.

b) Den är stationär om för alla $n, s, t_1, \ldots, t_n$ $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ och

$(X(t_1+s),\ldots,X(t_n+s)$ har samma fördelning.

c) Processen är svagt stationär om väntevärdet E)$(X(t))$ är konstant i t och $\mathrm{Cov}(X(t),X(t+s))$ inte beror på t

d) En Brownsk brygga är Gaussisk men inte stationär eller svagt stationär.

Uppgift 3

a) Fördelningsfunktionen för en Rayleighfördelning är $F(x)=1-\exp(-x^2)$. För att få ett rayleighfördelat slumptal kan man lösa ekvationen

$$F(X)=U.$$

Det ger här

$$X=-\sqrt{\ln(1-U)}.$$

b) På samma sätt kan man generera ett slumptal som är expnonentialfördelad (med vänteväre 1) som

$$-\ln(1-U).$$

Eftersom U och $1-U$ har samma fördelning går det också bra med

$$Y=-\ln(U).$$

Både X och Y är funktioner av U. Y är en växande funktion och X en avtagande funktion av U. Det följer att de måste vara negativt korrelerade.

Uppgift 4

a) Eftersom vi har en standardiserad Brownsk rörelse så är $X(1)\sim N(0,1)$. Alltså

$$\mathrm{P}(X(1)<1)=1-\Phi(1).$$

b) Låt T_a vara den första tiden som den Brownska rörelsen passerar värdet a. Händelsen att $X(t)\leq 1$ för alla $t<1$ är samma sak som att $T_1\geq 1$. Vi vet att

$$\mathrm{P}(T_a\leq t)=2\mathrm{P}(X(t)\geq a).$$

Det följer att den sökta sannolikheten är

$$2\mathrm{P}(X(1)\leq 1)-1=2\Phi(1)-1.$$

c) sannolikheten att en Brownsk rörelse går upp A innan den gått ner B är

$$\frac{B}{A+B}.$$

Eftersom processen är symmetrisk gäller här att den sökta sannolikheten är

$$\frac{1}{1+0.5} = 2/3.$$

Uppgift 5

a) Om ankomstintensiteten är λ så är den förväntade tiden då systemet är tomt, $\mathrm{E}(I) = 1/\lambda$, dvs $\lambda = 1/5$. Antalet kunder i kö är geoemtriskt fördelad med sannolikheten $1 - \lambda/\mu$, där μ är medelbetjäningstiden.

Om a_0 är intensiteten för ankomster till ett tomt system och P_0 är sannolikheten att systemet är tomst så gäller $a_0 = P_0$. Det gäller alltså $0.6 = P_0 = 1 - \lambda/\mu$. Det ger $\mu = 1/2$.

b) Enligt ovan är L lika med väntevärdet av en geometrisk fördelad stokastisk variabel.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2/3.$$

c) Om W är medeltid som en kund finns i systemet så är (enligt Littles formel)

$$W = \lambda L = 10/3.$$

Dessutom gäller att $W_Q = W - \mathrm{E}(S)$, dvs

$$W_Q = 10/3 - 2 = 4/3.$$

Uppgift 6

a) De kunder som finns i butiken av den första typen är de som anlänt under de senaste 2 minuterna. Detta antal är Poisson(2)-fördelat. På samma sätt är antalet kunder av andra typen de som kommit under de sista 5 minuterna. Deras antal är Poisson(1). Antalen är oberoende och alltså är summan Poisson(3)-fördelat.

b) Processen regenereras varje gång en kund kommer till ett tomt system. Systemet växlar mellan att vara tomt (off) och att det finns kunder (on).

c) Kunder anländer till systemet enligt en Poisson process med intensiteten $1 + 1/5 = 6/5$. Observera att summan av två oberoende Poissonprocesser är en Poissonprocess. Det innebär att den förvaäntade tiden till det kommer en ny kund är 5/6.

d) Låt I vara tiden då affären är tom och B tiden då det finns kunder. Vi vet att proportionen av tid som systemet är tomt är

$$\mathrm{P}_{tomt} = \frac{\mathrm{E}(I)}{\mathrm{E}(I) + \mathrm{E}(B)}.$$

Vi kan dessutom beräkna proportionen av tid som systemet är tomt som sannolikheten att det inte finns någon person i butiken. Enligt första delen är denna sannolikhet $\exp(-3)$. Detta ger här

$$\exp(-3) = \frac{5/6}{5/6 + \mathrm{E}(B)}.$$

Det ger

$$\mathrm{E}(B) = \frac{5/6(1 - exp(-3))}{exp(-3)} = 15.9$$