

Facit till Linjär analys, den 14 december 2004.

1. A) (2 POÄNG) BESTÄM KOSINUSSERIEN FÖR

$$f(x) = x^2 + 1, \quad 0 < x < 1.$$

Lösning. Man bestämmer kosinusserien för x^2 och adderar den med 1. Man får,
 $x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \pi n x$ där för $n \geq 1$ $a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = 2 \left[\frac{x^2 \sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 - \int_0^1 2x \frac{\sin \pi n x}{\pi n} dx = \frac{-4}{\pi n} \left[x \left(\frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos \pi n x}{\pi n} \right] = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \right]$. Däremot $a_0 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Alltså, $x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n \cos \pi n x}{n^2}$.

$$\text{Svar. } x^2 + 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n \cos \pi n x}{n^2}.$$

B) (2 POÄNG) MED HJÄLP AV DENNA SERIE BERÄKNA SUMMAN $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Lösning. Om man sätter $x = 0$ i serien för x^2 då fås $0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
Slutligen, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right)$.

$$\text{Svar. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

2. A) 3 POÄNG) BESTÄM LÖSNINGEN TILL RANDVÄRDESPROBLEMET

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Lösning. Man separerar variablerna $U = XT$ och får två Sturm-Liouvillesproblem

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad T' + 4\lambda T = 0.$$

Första problemet har spektrum $\alpha_n = \frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, \dots$ och egenfunktionerna $X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)x}{2}$. Andra problemet har motsvarande lösning $T_n(t) = e^{-4(\frac{2n+1}{2})^2 t} = e^{-(2n+1)^2 t}$. Man söker den lösning på formen $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t)$ som uppfyller villkoret $u(x, 0) = 3 \sin \frac{x}{2}$. Det är lätt att se att alla koefficienterna blir 0 förutom $a_1 = 3$.

$$\text{Svar. } u(x, t) = 3 \sin \frac{x}{2} e^{-t}.$$

B) (1 POÄNG) ANGE ETT LIKNANDE RANDVÄRDESPROBLEM PÅ INTERVALLET $[0, 2\pi]$ VARS LÖSNING SAMMANFALLER MED DEN I A) PÅ INTERVALLET $[0, \pi]$.

LÖSNING. I EXEMPLET 2 PÅ SIDAN 125 I BOKEN FINNS DET ETT PÅSTÅENDE ATT OM MAN UTVIDGAR FUNKTIONEN $f(x)$ I VILLKORET $u(x, 0) = f(x)$ SYMMETRISKT M.A.P. PUNKTEN π TILL INTERVALLET $[0, 2\pi]$ OCH BYTER VILLKORET $u_x(\pi, 0) = 0$ MOT $u(2\pi, 0) = 0$ DÅ FÅS DET PROBLEM SOM VI SÖKER.

3. (4 POÄNG) BESTÄM EGENVÄRDEN OCH EGENFUNKTIONERNA TILL STURM-LIOUVILLEPROBLEMET

$$\begin{cases} x^2 X'' + xX' + \lambda X = 0 \text{ PÅ } [1, e^2] \\ X(1) = X(e^2) = 0. \end{cases}$$

TIPS. ANVÄND KOORDINATBYTET $x = e^s$.

LÖSNING. MED VARIABELSUBSTITUTION $x = e^s$ GÅR DET URSPRUNGLIGA S-L-PROBLEMET ÖVER TILL

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0. \end{cases}$$

DET SISTNÄMDE PROBLEMET HAR SPEKTRUM $\alpha_n = \frac{\pi n}{2}$, $n \geq 1$ OCH EGENFUNKTIONERNA $X_n(s) = \sin \frac{\pi n s}{2}$. MED AVSEENDE PÅ DEN URSPRUNGLIGA KOORDINATEN x FÅS $X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{2} \ln x)$.

4. A) (3 POÄNG) FRAMSTÄLL FUNKTIONEN $f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ SOM KOSINUSINTEGRAL $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha x d\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{LÖSNING. MAN VET ATT } A(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \cos \alpha s ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3s \cos \alpha s ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(3+\alpha)s + \sin(3-\alpha)s] ds = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos \frac{\pi(3+\alpha)}{2} + 1}{3+\alpha} + \frac{-\cos \frac{\pi(3-\alpha)}{2} + 1}{3-\alpha} \right] = \frac{1}{\pi(9-\alpha^2)} [-(\alpha-3) \\ &+ (\alpha+3) + (\alpha-3)(\cos \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2}) - (\alpha+3)(\cos \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi\alpha}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2})] = \\ &= \frac{6 + (\alpha-3) \sin \frac{\pi\alpha}{2} + (\alpha+3) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(9-\alpha^2)} = \frac{2(3+\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2})}{\pi(9-\alpha^2)} \end{aligned}$$

$$\text{SVAR. } A(\alpha) = \frac{2(3+\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2})}{\pi(9-\alpha^2)}.$$

B) (1 POÄNG) BERÄKNA $\int_0^\infty A(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} d\alpha$.

$$\text{LÖSNING. MAN HAR ATT } \int_0^\infty A(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} d\alpha = \frac{f(\frac{\pi}{2}+) + f(\frac{\pi}{2}-)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

5. (2 POÄNG) A) BESTÄM c SÅDANT ATT FUNKTIONERNA $f_1 = x^2 + c - 1$ OCH $f_2 = \frac{1}{x+1}$ BLIR ORTOGONALA PÅ $[1, 2]$ RELATIVT DEN VANLIGA SKALÄRPRODUKTEN.

$$\begin{aligned} \text{LÖSNING. } \int_1^2 \frac{x^2+c-1}{x+1} dx &= \int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{c}{x+1} dx = \int_1^2 (x-1) dx + c \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 + c \ln|x+1| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + c(\ln \frac{3}{2}) = 0. \text{ ALLTSÅ, } c = \frac{-1}{2(\ln \frac{3}{2})}. \end{aligned}$$

$$\text{SVAR. } c = \frac{1}{\ln \frac{4}{3}}.$$

B) (1 POÄNG) NORMALISERA f_1 AND f_2 . (UTTRYCKET FÖR $\|f_1\|$ BLIR INTE SPECIELLT VAKERT.)

$$\begin{aligned} \text{LÖSNING. } \|f_1\|^2 &= \int_1^2 (x^2 - 1 + c)^2 dx = \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx + 2c \int_1^2 (x^2 - 1) dx + \\ &+ \int_1^2 c^2 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 - 2 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + x \Big|_1^2 + 2c \left(\frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 \right) + c^2 x \Big|_1^2 = \frac{31}{5} - \frac{14}{3} + 1 + 2c \frac{4}{3} + c^2 = \\ &= \frac{38}{15} + \frac{8c}{3} + c^2 = \frac{38}{15} + \frac{8}{3 \ln \frac{4}{3}} + \frac{1}{\ln^2 \frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

$$\|f_2\|^2 = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

DE NORMALISERADE EGENFUNKTIONERNA ÄR $\frac{f_1}{\|f_1\|}$ OCH $\frac{f_2}{\|f_2\|}$.

6. (4 POÄNG) MED HJÄLP AV D'ALEMBERTS FORMEL VISA ATT LÖSNINGEN TILL

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 5x, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

ÄR ENTYDIG.

LÖSNING. DETTA PROBLEM HAR LÖSNINGEN $u(x, t) = \frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ DÄR $F(z)$ ÄR UDDA π -PERIODISKA UTVIDGNINGEN AV $\sin 5z$ DVS FUNKTIONEN $\sin 5z$ SJÄLV. ALLTSÅ $u(x, t) = \frac{\sin 5(x+t)+\sin 5(x-t)}{2} = \sin 5x \cos 5t$. ENLIGT EN SATS PÅ S. 318 I BOKEN FÖR ENTYDIGHETEN AV DEN SISTNÄMNDE LÖSNINGEN TILL VÅG EK-VATIONEN RÄCKER DET OM $u(x, t)$ TILLHÖR KLASSEN C^2 , DVS ÄR 2-GÅNGER KONTINUERLIGT DERIVERBAR. DETTA VILLKOR ÄR UPPEBART UPPFYLLD FÖR $\sin 5x \cos 5t$.