MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Andrzej Szulkin

Tentamensskrivning i
Analys IV, 7,5 hp
den 17 augusti 2015 kl. 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

15 poäng, inklusive bonus, ger säkert godkänt. Dock måste minst 2 poäng komma från teoridelen. Gamla bonuspoäng, dvs. poäng intjänade HT 14 eller tidigare ***räknas inte****.*

OBS! Ange antalet bonuspoäng på skrivningsomslaget.

1. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+2y^2}, \frac{x}{x^2+2y^2}\right)$ och γ är cirkeln $x^2+y^2=1$ tagen ett varv moturs. 5 p

2. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$, där $\mathbf{F} = (xz - x^5, 5x^4y, (x^2+y^2)z)$ och Y är den del av cylinderytan $x^2+y^2=1$ för vilken $0 \le z \le 1$. Normalen pekar bort från z-axeln. 5 p

3. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x^2+y, 4y^3z^2, x+2y^4z)$ och γ är skärningen mellan ytorna $x^2+y^2=1$ och $z = x^2-y^2$, orienterad moturs uppifrån sett. 5 p

4. Beräkna $\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)}$ i följande två fall: a) γ är omkretsen till rektangeln med hörn i punkterna $\frac{1}{2}-2i$, $\frac{1}{2}+2i$, $-\frac{1}{2}-2i$, $-\frac{1}{2}+2i$, orienterad moturs, b) γ är cirkeln $|z-\frac{1}{2}|=1$ orienterad moturs. 5 p

5. a) Låt α och β vara konstanter sådana att $0<\alpha<1<\beta$. Undersök om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ konvergerar. $2,5$ p

   b) Undersök om följande serier konvergerar: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k+1}$. $2,5$ p

Teoridel

Välj ***en av*** *följande två uppgifter:*

6. Formulera divergenssatsen. Bevisa den för områden i rummet med en under- och en översida. Skissera sedan hur man genomför beviset för områden med en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera också hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. (Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier) Antag att: (i) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge 0$, (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ är konvergent och att $0 \le s \le a_1$. 5 p

Skrivningsåterlämning onsdag den 19 augusti kl. 15.00 i sal 15, därefter i rum 204, hus 6.